АВТОРСКА СПРАВКА ЗА ОРИГИНАЛНИ НАУЧНИ ПРИНОСИ

в трудовете за участие в конкурса за доцент

в Института по Математика и Информатика при БАН, София,

обявен в Държавен Вестник, Брой 65 от 2 август 2024 г.

Валдемар Василев Цанов

Трудовете представени за конкурса са следните.

[1] V.V. Tsanov, *Triangle groups, automorphic forms, and torus knots*, L'Enseignement Mathématique (2) 59 (2013), 73-113. ISSN print 0013-8584, ISSN 2309-4672, DOI:10.4171/LEM/59-1-3.

[2] A. Sawicki, V.V. Tsanov, *A link between quantum entanglement, secant varieties and sphericity*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46** (2013), 265301, 20 pages. ISSN 17518121, DOI:10.1088/1751-8113/46/26/265301.

[3] A.V. Petukhov, V.V. Tsanov, *Homogeneous projective varieties with semi-continuous rank function*, Manuscripta Mathematica **147** (2015), 269–303. ISSN 00252611, DOI:10.1007/s00229-014-0723-5.

[4] T. Maciążek, V.V. Tsanov, *Quantum marginals from pure doubly excited states*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **50** (2017) 465-504. ISSN 1751-8121, DOI 10.1088/1751-8121/aa8c5f.

[5] H. Seppänen, V.V. Tsanov, *Geometric invariant theory for principal three-dimensional subgroups acting on flag varieties*, In: Representation theory - current trends and perspectives, ed. H. Krause et al, Series of Congress Reports, EMS 2017, pp. 637-663. ISBN 978-3-03719-171-2, 10.4171/171-1/22.

[6] V.V. Tsanov, *Secant varieties and degrees of invariants*, Journal of Geometry and Symmetry in Physics **51** (2019), 73–85. ISSN 13125192, DOI:10.7546/jgsp-51-2019-73-85.

[7] H. Seppänen, V.V. Tsanov, *Unstable loci in flag varieties and variations of quotients*, International Mathematics Research Notices **2022**, Issue 8, (2022), 5882–5934. Published online on 19.10.2020. ISSN 1073-7928, DOI: 10.1093/imrn/rnaa268.

[8] V.V. Tsanov, *Partial convex hulls of coadjoint orbits and degrees of invariants*, Proceeding of XV International workshop "Lie theory and its applications in physics", ed. Vl. Dobrev, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, to appear.

[9] V.V. Tsanov, *Homogeneous projective varieties and invariant theory*, Habilitationsschrift, Ruhr-Universität Bochum, Germany, 2020. Публикуван в Lap-Lambert Academic Publishing, 2024, ISBN 978-620-7-48372-3.

[10] I.B. Penkov, V.V. Tsanov, *Representations of large Mackey Lie algebras and universal tensor categories*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 2024, https://doi.org/10.1007/s12188-024-00280-6, ISSN 0025-5858.

Темите на предложените трудове се разделят в следните три направления на геометрията и теорията на Ли, като първото направление обхваща основната част от работата.

(I) - *Геометрична теория на инвариантите и флагови многообразия*. Статии [2]-[9]. Описание на основните приноси е дадено по-долу.

(II) - *Универсални тензорни категории и категории от тензорни модули на безкрайномерни алгебри на Маки-Ли.* В статия [10], съвместна с Иван Пенков, се строи универсална абелева тензорна категория $\mathbf{T}_t$ породена от два обекта снабдени със сдвояване $X \otimes Y \to \underline{\mathbf{1}}$, където $\underline{\mathbf{1}}$ е моноидалната единица, и крайни филтрации $0 \subsetneq X_0 \subsetneq \ldots \subsetneq X_{t+1} = X$ and $0 \subsetneq Y_0 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_{t+1} = Y$. Модел за такава универсална категория е една тензорна категория от представяния на Маки-Ли $\mathfrak{gl}^M(V, V_*)$, с кардиналност $2^{\aleph_t}$, асоциирана със сдвояване на векторни пространства V, V_* размерност $\aleph_t$ над алгебрическ затворено поле $\mathbb{K}$ с характеристика 0. Като предварителна стъпка се изучава тензорна категория $\mathbb{T}_t$ породена от алгебричните дуални пространства V^* and $(V_*)^*$ и затворена относно подфактори. Класифицират се простите обекти не разложмите инективни обекти в $\mathbb{T}_t$. Простите обекти те се параметризират от набори от $2(t+1)$ диаграми на Юнг, по аналогия на дуалността на Шур-Вайл, която в този контекст включва неразцепващи се филтрации. Инективната обвивка I на тривиалния модул $\mathbb{K}$ в $\mathbb{T}_t$ носи естествена структура на комутативна алгебра, и категорията $\mathbf{T}_t$ се състои от всички свободни I-модули в $\mathbb{T}_t$. Класифицират се простите обекти в $\mathbf{T}_t$, като тензорни произведения $I \otimes S$ за S прост в $\mathbb{T}_t$. Неразложимите инективни обекти се запазват от $\mathbb{T}_t$ в $\mathbf{T}_t$; и в двата случая са изчислени цокълните филтраци и е показано, че кратностите на прости обекти като подфактори на неприводими инективни са **крайни**, с явен коминаторен израз в термини на числа на Литълууд-Ричардсон.

Дефиницията на алгебри на Маки-Ли е дадена от Пенков и Серганова в [PS2014], и някои техни категории са изучени от Пенков и Кирваситу, но категориите в $\mathbb{T}_t$ и $\mathbf{T}_t$ са разглеждани само в случая $t = 0$, когато V е с изброима размерност. Един резултат, който е нов дори в случая $t = 0$, е описание на Ext-групите на двойки прости модули, и явни комбинаторни формули за размерностите на тези групи над $\mathbb{K}$, които също са крайни. Доказва се Козюлевост на категорията $\mathbf{T}_t$, и се използват явните комбинаторни формули, за да бъдат остановени някои допълнителни симетрии на категориите $\mathbb{T}_t$ и $\mathbf{T}_t$, свързани с техните обратни категории.

(III) - *Тримерна геометрия и теория на възлите.* В статия [1] се строи геометрична структура в допълнението на торичен възел в тримерната сфера, в смисъла на Търстон, като за целта се използват автоморфни форми. Базира се отчасти на магистърската дипломна работа на автора.

Разглеждат се връзки между три класически понятия: триъгълни Фуксови групи, $\mathbb{C}^\times$-еквивариантни особености на равнинни криви, и допълнения на торични възли в тримерната сфера. Протопитния пример е свързан а модулярната група $PSL_2(\mathbb{Z})$: факторът на допиратлното разслоение към горната полуравнина $\mathbb{H}$ на Пуанкаре, с извадено нулево сечение, факторизирано под действието на $PSL_2(\mathbb{Z})$ е бихоломорфно на допълнението на кривата $z^3 - 27w^2 = 0$ в $\mathbb{C}^2$. Това може да се докаже, като се използва факта, че алгебрата на модулярните форми в породена от два елемента g_2, g_3 и къспидалната форма $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ не се анулира в полуравнината. Локалния възел около особеността на тази крива е от тип детелина, $_{2,3}$. От друга страна, разслението от единични допирателни вектори към $\mathbb{H}$ дифеоморфно на $PSL_2(\mathbb{R})$, и така се получава дифеоморфизъм $PSL_2(\mathbb{R})/PSL_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3}$. Тази известна конструкция е обобщена в [1], всички торични възли $K_{p,q}$ за p, q взаимно-прости, и съответно особени криви от вида $z^q + w^p = 0$, и триъгълни групи от тип $\Delta(p, q, \infty) \subset PSL_2(\mathbb{R})$ с един връх триъгълника лежащ върху абсолюта на безкрайност. Оказва се, че еквивариантно накритие от $PSL_2(\mathbb{R})$ върху $\mathbb{S}^3 \setminus K_{p,q}$ има само $\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3}$, а в общия случай трябва да се използва универсалната накриваша $\widetilde{SL_2}(\mathbb{R})$, и автотоморфни форми от рационална степен.

Показано е, че факторът $PSL_2(\mathbb{R})/\Delta(p,q,\infty)$ е хомотопно еквивалентен на $\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3}$, но е дифеоморфен на допълнението на възел в лещово пространство, и се накрива от $\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3}$ със степен $pq-(p+q)$. Това число е равно на индекса на подгрупа $G_{p,q}$ в прообраза $\widetilde{\Delta}(p,q,\infty)$ на $\Delta(p,q,\infty)$ в $\widetilde{SL_2}(\mathbb{R})$, която представя фундаменталната група на $\mathbb{S}^3 \setminus K_{p,q}$ и също се характеризира като ядрото на определен характер $\widetilde{\Delta}(p,q,\infty)$. А помощта на явни пораждащи на алгебрата от автоморфни форми на $G_{p,q}$ е построен дифеоморфизъм авторморфни форми е построен $\widetilde{SL_2}(\mathbb{R})/G_{p,q} \to \mathbb{S}^3 \setminus K_{p,q}$. Методит използват идеи на Милнор и Долгачев, въведени за изучаването на алгебрите от автоморфни форми на кокомпактни (триъгълни) групи, като са направени необходимите модификации за некомпактния случай.

Като следствие, върху допълнението на торичен възел се получава геометрична структура моделирана върху $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, в смисъла на Търстон. Съществуването на такава структура е известно, от общи топологични свойства (Сайфертово слоение), но явното изображение, разултатите за автоморфни форми, както и някои от горепосочените детаили, като индекса $pq-(p+q)$, са оригинални резултати.

(I) Геометрична теория на инвариантите и флагови многообразия.

В трудовете [2]-[9] се изучават съответствия между геометрията на хомогенните комплексни проективни многообразия и структурата на техните групи от симетрии, с фокус върху някои аспекти на теория на инвариантите свързани с подгрупи на групите от симетрии. Общата схема е базирана на теоремата на Борел-Вей и Геометричната Теория на Инвариантите (GIT) на Хилберт-Мъмфорд. Засягат се класически, широко изучавани обекти и въпроси. Един от основните източници на проблеми и неизяснени въпроси е известната неконструктивност на Хилбертовата теорема, която в един обобщен вариант гласи, че пръстена от инварианти $\mathbb{C}[X]^G$ в хомогенния координатен пръстен на комплексно проективно многообразие $X \subset \mathbb{P}(V)$ със зададено действие на редуктивна линейна алгебрична група $G \subset GL(V)$ е крайно породен от хомогенни елементи. В настоящата работа се изследват връски между структурната теория на редуктивните групи и вариацията на някои параметри на пораждащи множества от инварианти, при хипотезата, че многообразието, върху което групата действа, е хомогенно относно по-голяма редуктивна група. Специално внимание е отделено на геометрията на нестабилното подмногообразие X_G^{us} - геометричното място, където инвариантите без константен член се анулират. Една обща идея е, че някои свойства на пръстена от инварианти са свързани с взаимното положение на нестабилното подмногообразие и някои естествени геометрични обекти в X, например линейно вложени проективни пространства допирателни, оскулачни или секантни към затворена орбита на подгрупата.

Геометричната теория на инвариантите в гореописаната ситуация може да бъде интерпретирана, според теорема на Кирван [Kir84], в термини на компактни групи и изображения на момента. Всяка свързана комплексна редуктивна група на Ли G се получава като комплексификация $G = K^c$ на своя максимална компактна подгрупа , като K действа транзитивно на всяко компактно G-хомогенно пространство, и G действа на всяко комплексно -хомогенно пространство. Много от свойствата на унитарно представяне $K \to SU(V)$ и проективно G-многообразие $X \subset \mathbb{P}(V)$ са кодирани в изображението на момента относно формата на Фубини-Щуди $\mu : X \to \mathfrak{k}^*$, в дуалното пространство към компактната алгебрата на Ли $\mathfrak{k} = Lie(K) \cong \mathfrak{k}^*$. Според теорема на Кирван, моментовия (или Кирванов) политоп - сечението $\mu(\mathbb{P}(V))^+$ на образа на μ с камера на Вайл $\mathfrak{t}^+ \subset \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{k}^*$ в дуалното пространство към максимална абелева подалгебра $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ е изпъкнал политоп, наречен моментов политоп. Този политоп определя целия образ, както и типа на неприводимите K-подмодули в координатния пръстен $\mathbb{C}[V]$, според теорема на Брион. Един важен клас действия - сферичните - се характеризира в този контекст с това, че изображението на момента различава орбитите, т.е. различни орбити имат различни образи.

В проективното пространство на неприводимо унитарно представяне $K \to SU(V)$ има единствена комплексна орбита $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(V)$, която е също единствената затворена G-орбита - вложено флагово многообразие.

Забележително е, че въпреки развитата теория, явни описания на моментови политопи липсват в случаи от фундаментален интерес за много приложения, например представянето на SU_n върху външната тензорна степен $\Lambda^k\mathbb{C}^n$ или представянето на $SU_{n_1} \otimes SU_{n_k}$ върху $\mathbb{C}^{n_1} \otimes ... \otimes \mathbb{C}^{n_k}$. Обзор на известни резултати е даден в [VW14]. Едно общо наблюдение е, че образите са най-трудни за описание за фундаменталните представяния на дадена група K - тези които не се съдържат в тензорно произведение на нетривиални представяния. В контраст, повечето неприводими представяния имат изпъкнал и лесен за описание образ (не политопа, целия образ), според една теорема доказана независимо от Вилдбергер [W92], и от Арнал и Лудвиг [AL92], която гласи, че образа на момента е изпъкнал и $\mu(\mathbb{P}(V)) \subset \mathrm{Conv}(K\lambda)$ тогава и само тогава когато комплексната K-орбита $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(V)$ не съдържа проективни прави, т.е. втората Гаусова фундаментална форма на $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(V)$ е неизродена.

Флагови многообразия и теорема на Борел-Вей

За пълнота тук са приведени някои общи сведения използвани във формулираните по-долу резултати.

Комплексните проективни многообразия хомогенни относно свързана линейна алгебрична група образуват клас многообразия, класифициран в класически работи на Борел, и намерил приложения и алтернативни характеризации в Келеровата геометрия, теорията на Ли и други области. Всяко такова многообразие е хомогенно относно полупроста група G и може да бъде представено като факторпространство G/P, където P е параболична подгрупа, т.е. съдържа максимална разрешима (Борелева) подгрупа $B \subset G$; факторпространство по параболична подгрупа се нарича флагово многообразие на групата G, а по Борелева подгрупа - пълно флагово многообразие. Теоремата на Борел-Вей описва модели на неприводимите крайномерни представяния на G получени като пространства от сечения на линейни разслоения върху пълното флаговото многообразие $X = G/B$. Точната формулировка и някои необходими означения са както следва. Нека $T \subset B$ е максимален алгебричен тор (Картанова подгрупа) на B и следователно на G. Нека $W = N_G(T)/T$ е Вайловата група. Нека Λ означава решетката от характери на T и $\Lambda^+ \subset \Lambda$ означава моноида от доминантни тегла относно B. Неприводимите крайномерни представяния на G се параметризират от елементите на Λ^+ като старши тегла; нека $V(\lambda)$ означава неприводимо представяне със старше тегло $\lambda \in \Lambda^+$. От друга страна, Пикаровата група на X е изоморфна на Λ, чрез съответствието $\lambda \mapsto \mathcal{L}_\lambda = G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda}$, където $\mathbb{C}_{-\lambda}$ означава едномерно представне на B с характер $-\lambda$ (припомням, че групите от характери на B и T съвпадат). Теоремата на Борел-Вей гласи:

$$H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \cong \begin{cases} V(\lambda)^* \text{ , if } \lambda \in \Lambda^+, \\ 0 \quad\quad \text{ , otherwise.} \end{cases}$$

Модулът $V(\lambda)^*$ е неприводим, със старше тегло $-w_0\lambda$, където $w_0 \in W$ е такъв, че $w_0(\Lambda^+) = -\Lambda^+$. В частност, Λ^+ отговаря на множеството от ефективни линейни разслоения върху X. Пръстенът породен от сеченията на $\mathcal{L}_\lambda$ и неговите степени има вида

$$\mathcal{R}_\lambda = \bigoplus_{j=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{L}_\lambda^j) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} V(j\lambda)^* \ .$$

Коксовият пръстен (или тотален координатен пръстен) на X - сумата от пространствата от сечения на всички линейни разслоения - е изоморфен на сумата от неприводими модули, всеки с кратност едно:

$$\mathrm{Cox}(X) = \bigoplus_{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)} H^0(X, \mathcal{L}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} V(\lambda) \ .$$

Ефективните линейнии разслоения върху X са полуобилни. За дадено $\lambda \in \Lambda^+$, образът $\mathbb{X}(\lambda)$ на съответното изображение $X \to \mathbb{P}(V(\lambda))$ съвпада с G-орбитата на правата от старши вектори $[v_\lambda] \in \mathbb{P}(V(\lambda))$:

$$X = G/B \to \mathbb{X}(\lambda) = G[v_\lambda] \subset \mathbb{P}(V(\lambda)) \ .$$

Стабилизаторът на $[v_\lambda]$ е параболична подгрупа на G съдържаща B и означена тук с P_λ, така че $\mathbb{X}(\lambda) \cong G/P_\lambda$. Множеството от строго доминантни тегла, т.е. тегла за който $P_\lambda = B$ и $\mathbb{X}(\lambda) \cong X$, означаваме с Λ^{++}; те отговарят на обилните (и много обилни) линейни разслоения.

Нека $\Delta \subset \Lambda$ означава корневата система и $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$ е разделянето ѝ на положителни и отрицателни корени съответно на B. За даден G-модул V и характер (или тегло) $\nu \in \Lambda$, нека $V_\nu \subset V$ означава подпространството, където T действа с дадения характер. Нека $\Lambda(V) \subset \Lambda$ означава множеството от тегла, за които $V_\nu \neq 0$. За дадено подмножество $M \subset \Lambda(V)$ полагаме $V_M = \bigoplus_{\nu \in M} V_\nu$. За $\lambda \in \Lambda^+$ теглата $w\lambda$, $w \in W$ се наричат екстремни тегла на неприводимия G-модул $V(\lambda)$. Съответните точки в $\mathbb{P}(V(\lambda))$ са точно T-неподвижните точки в $\mathbb{X}(\lambda)$:

$$\mathbb{X}(\lambda)^T = \{x_w = [v_{w\lambda}] : w \in W\}.$$

Това множество е в биекция с множеството от съседни класове W/W_λ.

Нека $\mu : \mathbb{P}(V(\lambda)) \to \mathfrak{k}^*$ е изображение на момента за максимална компактна подгрупа $K \subset G$. Тогава рестрикцията $\mu_{|\mathbb{X}(\lambda)}$ е изоморфизъм на Келерови многообразия върху ко-присъединената орбита $K\lambda \subset \mathfrak{k}^*$ съответна на старшето тегло, снабдена с формата на Костант-Кириллов-Сурио. Образът на момента се съдържа в изпъкналата обвивка на тази орбита $\mu(\mathbb{P}(V)) \subset \mathrm{Conv}(K\lambda)$.

Секантното многообразие от ред $r \in \mathbb{N}$ към дадено проективно многообразие $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(V)$, което не се съдържа в хиперравнина, наричаме затворената по Зариски обвивка на обединението на линейните обвивки на множества от r точки от $\mathbb{X}$:

$$\Sigma_r(\mathbb{X}) := \overline{\Sigma_r^\circ(\mathbb{X})} \ , \quad \Sigma_r^\circ(\mathbb{X}) := \bigcup_{x_1,\dots,x_r \in \mathbb{X}} \mathbb{P}Span\{x_1, ..., x_r\}. \tag{1}$$

Минималното r, за което $\Sigma_r(\mathbb{X}) = \mathbb{P}(V)$ означаваме с $r^{\mathbb{X}}_{\text{generic}}$. Изображението

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{X}} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{N} \ , \ \mathrm{rk}_{\mathbb{X}}[v] = \min\{r \in \mathbb{N} : \exists [x_1], ..., [x_r] \in \mathbb{X}, v = x_1 + ... + x_r\}$$

се нарича $\mathbb{X}$-ранг функция върху $\mathbb{P}(V)$. Това понятие обобщаваща понятието ранг на тензори, който се получава като $\mathrm{rk}_{\mathbb{X}}$ за многообразието на Сегре от разложими тензори $\mathbb{X} = \mathrm{Segre}(\mathbb{P}^{n_1} \times ... \times \mathbb{P}^{n_m}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n_1+1} \otimes ... \otimes \mathbb{C}^{n_m+1})$, като за $m = 2$ получаваме ранг на матрици. Очевидно секантните многообразия се запазват при действие на линейна група върху $\mathbb{X}$ и рангът е константен върху орбити.

Едно свойство на ранг-функциите, и секантните многообразия изследвано в [2],[3],[6] е следното. Казваме, че $\mathbb{X}$ е многообразие с полунепрекъсната ранг-функция, ако за всяко $r \in \mathbb{N}$ множеството $\Sigma_r^\circ(\mathbb{X}) = \{[v] \in \mathbb{P}(V) : \mathrm{rk}_{\mathbb{X}}[v] \leq r\}$ е затворено по Зариски в $\mathbb{P}(V)$. т.е. $\Sigma_r^\circ(\mathbb{X}) = \Sigma_r(\mathbb{X})$. Такъв е случаят за ранг на линейни оператори, но не и ранга по отношение на многообразието от разложими тензори в тензорно произведение на три или повече векторни пространства. В общия случай максималната стойност r_{max} на $\mathrm{rk}_{\mathbb{X}}$ не съвпада с ранга на точка в общо положение $r^{\mathbb{X}}_{\text{generic}}$, но при полунепрекъсната ранг-функция важи $r^{\mathbb{X}}_{\text{generic}} = r_{max}$.

(I-1) Образи на изображението на момента

В Статии [2],[4] - съвместни съответно с Adam Sawicki и Tomasz Maciazek от Института по Теоретична Физика при Полската Академия на Науките. Изследват се връзки между свойства на изображения на момента и геометрията на секантни и оскулачни пространства към комплексни проективни орбити на компактни групи на Ли, както и приложения към теорията на квантовото преплитане и квантовата информация. Тези статии имат частично обзорен характер, целящ превод да понятия между проективната геометрия и квантовата теория.

- В [2] се изучават образите под изображението на момента на секантните многообразия $\Sigma_r(\mathbb{X}) \subset \mathbb{P}(V)$ към комплексната проективна орбита $\mathbb{X}$ в неприводимо представяне на K. Фокусът е върху тензорни представяния от видовете $V = \Lambda^k\mathbb{C}^n$ или $S^k\mathbb{C}^n$ за $K = SU_n$, и $V = \mathbb{C}^{n_1} \otimes ... \otimes \mathbb{C}^{n_k}$ за $K = SU_{n_1} \times SU_{n_k}$ изучавани в теорията на квантовото преплитане. Оказва се, че за такива представяния, сферичността на действието на K върху $\mathbb{P}(V)$ е еквивалентна на полунепрекъснатостта на ранг-функцията, и се получава точно за случаите $k = 2$. Този резултат следва лесно от известната класификация на сферични действия върху линейни представяния (Виж [Kn98]). В статията [2] е даден и директен аргумент за горепосочените тензорни представяния. Изследвани са също и (по-интересните) случаи, когато ранг-функцията не е полунепрекъсната, и има точки в $\mathbb{P}(V)$ лежащи в затворената обвивка на K^c-орбити от точки с по-нисък $\mathbb{X}$-ранг. Типичен пример са точки върху дадена проективна права допирателна към $\mathbb{X}$ - те принадлежат на $\Sigma_2(\mathbb{X})$, но имат $\mathbb{X}$-ранг равен на най-ниската степен на еквивариантна рационална крива лежаща в X и допирателна към дадената права.

- В [4] се разглеждат образите относно μ на оскулачни пространства към единствената комплексна K-орбита $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(V)$, където $K \to SU(V)$ е неприводимо. Класифицират се неприводими тензорни представяния, за които политопът на момента се покрива от образа на единствено оскулачно пространство от втори ред. Такъв е случая за всяко сферично действие, но има и други изключителни случаи.

(I-2) Степени на инвариантни полиноми и секантни многообразия (Статии [6],[9])

Прототипната задача на теорията на инвариантите е задачата за описание на пръстена $\mathbb{C}[V]^G$ от G-инвариантни полиноми върху даден G-модул V. Тук разглеждаме случая, когато V е крайномерено комплексно векторно пространство и G е свързана полупроста линейна комплексна алгебрична група. Известна теорема на Хилберт гласи, че $\mathbb{C}[V]^G$ е породен над $\mathbb{C}$ от краен брой хомогенни полиноми. Значително внимание в литературата е отделено на така нареченото Ньотерово число $\mathrm{No}(G, V)$ - минималната степен d, за която $\mathbb{C}[V]^G_{\leq d}$ (простанството от инварианти от степен не надвишаваща d) поражда $\mathbb{C}[V]^G$. Ако Ньотеровото число е известно, то намирането на пораждащо множество се свежда до крайно изчислние. Да отбележим, че пораждащите елементи не са определени еднозначно, но степените на минимално пораждащо множество са еднозначно определени, ако се вземат под внимание кратностите и степените се подредят в нарастващ ред. В случая, когато V е неприводим G-модул, първата горна граница за $\mathrm{No}(G, V)$ е намерена от Попов [P81] и зависи експоненциално от началните данни. Горна граница с полиномиална зависмост е получена от Дерксен [Der01].

В трудове [6],[9] се изследват инваранти от ниска степен и е намерена долна граница за степените на неконстантни хомогенни инварианти върху даден неприводим модул. Получени са също определени делители на степените на пораждащи елементи. В частност, предложените резултати дават долни граници за Ньотеровото число. Тези долни граници не са точни в общия случай, но се оказват точни за някои специални класове от модули.

Напомняме, че секантните $\Sigma_r(\mathbb{X})$ са дефинирани в (1), а нестабилния локус, още наричан нулев конус, в проективното пространство на даден G-модул V се получава по лема на Хилберт като

$$\mathbb{P}(V)^{us}_G = \{[v] \in \mathbb{P}(V) : \overline{Gv} \ni 0\} = Z(J),$$

където $Z(J) \subset \mathbb{P}(V)$ е общото място на анулиране на елементите на идеала в $J \subset \mathbb{C}[V]^G$, състоящ се от елементите анулиращи се в $0 \in V$, т.е. $J = \bigoplus_{d \geq 1} \mathbb{C}[V]^G_d$.

Теорема 0.1. *([6]) Нека $V = V(\lambda)$ е нетривиален неприводим G-модул и нека $\mathbb{X} = \mathbb{X}(\lambda) \subset \mathbb{P}(V)$ е проективната G-орбита на старшия вектор. Да допуснем, че $\mathbb{C}[V]^G \neq \mathbb{C}$ и нека*

$0 < d_1 \leq ... \leq d_n$ *са степените на елементите на минимално пораждащо множество от хомогенни инвариантни полиноми.*

(1) Ако ненулев хомогеннен инвариант $f \in \mathbb{C}[V]^G_d$ *се анулира върху* $\Sigma_r(\mathbb{X})$, *тогава* $r < d$.

(2) Числото $r^{\mathbb{X}}_{\text{generic}} = \min\{r \in \mathbb{N} : \Sigma_r(\mathbb{X}) = \mathbb{P}(V)\}$ *е долна граница за числото на Ньотер:*

$$r^{\mathbb{X}}_{\text{generic}} \leq d_n = \text{No}(G,V) \ .$$

(3) Числото $r_{us} = \max\{r \in \mathbb{N} : r \leq r^{\mathbb{X}}_{\text{generic}}, \Sigma_r(\mathbb{X}) \subset \mathbb{P}(V)^{us}_G\}$ *удовлетворява неравенствата* $r_{us} < r^{\mathbb{X}}_{\text{generic}}$ *и*

$$r_{us} < d_1 \ .$$

Теорема 0.2. *([6],[9]) Нека* $M = \{\nu_1, ..., \nu_r\} \subset \Lambda$ *е множество от* r *ненулеви тегла, което е линейно зависимо над* $\mathbb{N}$ *и е минимално с това свойство. Да положим* $b_M = b_1 + ... + b_r$, *където* $b_j \in \mathbb{N}$ *са еднозначно определените коефициенти, за които* $\sum b_j \nu_j = 0$ *и* НОД$\{b_1, ..., b_r\} = 1$.

(i) Ако удовлетворява условието на Дадок-Кац $M \cap (M + \Delta) = \emptyset$, *където* $\Delta \subset \Lambda$ *е корневата система, то за всеки* G*-модул* V *удовлетворяващ* $M \subset \Lambda(V)$, *всяко пораждащо множество от хомогенни елементи в* $\mathbb{C}[V]^G$ *има елемент* f, *чиято степен се дели на* b_M;

(ii) Ако M *се състои от екстремни тегла на неприводим* G*-модул* $V(\lambda)$, *т.е.* $M \subset W\lambda$ *за дадено* $\lambda \in \Lambda^+ \setminus \{0\}$, *то съществува* $k \in \mathbb{N}$ *такова, че всяко пораждащо множество в* $\mathbb{C}[V(k\lambda)]^G$ *има елемент* f *от степен* $\text{deg} f = b_M$, *който не се анулира върху секантното многообразие* $\sigma_r(\mathbb{X}(k\lambda)) \subset \mathbb{P}(V(k\lambda))$.

В доказатлствата важна роля играят резултати на Ландсберг и Манивел [LM03] за идеалите на секантни многообразия.

(I-3) Проективни многообразия с полунепрекъсната ранг-функция ([3],[6],[10])

Горните теореми 0.1 и 0.2 показват връзка между степените на полиноми от минимално пораждащо множество на инвариантния пръстен $\mathbb{C}[V]^G$ върху неприводим G-модул $V \cong V(\lambda)$, от една страна, и от друга, секантните многообразия към вложеното флагово многообразие $G/P_\lambda \cong \mathbb{X} \subset \mathbb{P}(V)$. Тази връзка се оказва особено точна за случаите определени със свойсвото полунепрекъснатост на ранг-функцията, еквивалентно на изискването $\Sigma^\circ_r(\mathbb{X})$ да е затворено множество за всяко r, т.е. $\Sigma_r(\mathbb{X}) = \Sigma^\circ_r(\mathbb{X})$ (виж формула (1)).

Задачата за класификация на многообразията с полунепрекъсната ранг-функция е поставена от Баур, Драйсма и де Грааф в обзора [BDG07], заедно с други въпроси в това направление. В по-ранна работа [BD04], Баур и Драйсма изучават присъедините многообразия на класически прости комплексни алгебри на Ли, т.е. единствената затворена орбита $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ на присъедината група G (орбитата през корневи вектор с дълъг корен), като описват нилпотентните орбити в секантните многообразия. Тук $\text{rk}_{\mathbb{X}}$ е полунепрекъсната при $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ или $\mathfrak{sp}_{2n}$, и не е полунепрекъсната при $\mathfrak{so}_n$. Ландсберг и Манивел, [LM03], доказват полунепрекъснатост на ранг-функцията клас многообразия, наречени под-ко-миниатюрни; такова многообразие параметризира проективните прави лежащи в дадено неприводимо, компактно, Ермитово, симетрично пространство вложено в проективно пространство от минимална размерност. Пълната класификация е получена от автора и А. Петухов в [3] и приведена тук в Таблица 1. Оказва се, че ако $\Sigma^\circ_2(\mathbb{X})$ е затворено, то това свойство важи за всички r. Според една класическа теорема на Фултън и Хансен [FH79], $\Sigma^\circ_2(\mathbb{X})$ е затворено тогава и само тогава, когато всяка проективна права $L \subset \mathbb{P}(V)$ допирателна към $\mathbb{X}$ лежи в обединението на правите прекарани през двойки точки от $\mathbb{X}$.

Следната теорема обобщава класификацията от [3] и резултати [6],[9] за пръстена от инварианти $\mathbb{C}[V(\lambda)]^G$, който се оказва полиномиален, при хипотезата за полунепрекъснатост на ранг-функцията $\text{rk}_{\mathbb{X}(\lambda)}$. Хипотезата в теоремата е по-слаба на пръв поглед, но е еквивалентна на полунепрекъснатостта според точка (1) на теоремата.

Теорема 0.3. ([3],[6],[9])

Нека $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(V)$ е проективно многообразие хомогенно относно свързана полупроста алгебрична подгрупа $G \subset SL(V)$ действаща неприводимо върху V, като G е максимална с това свойство. Да допуснем, че $\mathbb{X}$ удовлетворява условието

$$\Sigma_2(\mathbb{X}) = \Sigma_2^\circ(\mathbb{X}).$$

Тогава:

(1) $\Sigma_r(\mathbb{X}) = \Sigma_r^\circ(\mathbb{X})$ *за всяко* $r = 1, ..., r_{max} = r^{\mathbb{X}}_{\text{generic}}$, *и* $\mathbb{X}$ *има полунепрекъсната ранг-функция.*

(2) Пръстенът от инвариантни полиноми $\mathbb{C}[V]^G$ *е изоморфен на полиномиален пръстен на* k *променливи, където*

$$k := r_{max} - r_{us}\ , \quad r_{us} := \max\{r \in \mathbb{N} : r \leq r_{max}, \Sigma_r(\mathbb{X}) \subset \mathbb{P}(V)^{us}_G\}.$$

Ако $k > 0$, *то съществуват хомогенни елементи* $f_1, ..., f_k \in \mathbb{C}[V]^G$ *със строго нарастващи степени* $d_1 < ... < d_k$ *такива, че*

$$\mathbb{C}[V]^G = \mathbb{C}[f_1, ..., f_k], \quad d_1 = r_{us} + 1,$$

и които се анулират върху секантните многообразия към $\mathbb{X}$ *както следва:*

$$\Sigma_r(\mathbb{X}) \subset Z(f_j) \iff r - r_{us} < j.$$

Полиномите $f_1, ..., f_k$ *са определени от горните свойства еднозначно, с точност до ненулеви скалари.*

(3) Ако $k > 0$, *степените* $d_1 < ... < d_k$ *съвпадат с числата* $r_{us} + 1, ..., r_{max}$, *т.е. имат вида*

$$d_j = r_{us} + j \quad \text{за} \quad j = 1, ..., k,$$

освен в случая на когато $\mathbb{X} = \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{2n}, \omega) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2_0\mathbb{C}^{2n})$ *е Грасмановото многообразие от двумерни подпространства на* $\mathbb{C}^{2n}$ *изотропни относно неизродена антисиметрична билинейна форма* $\omega : \Lambda^2\mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$ *с ядро* $\Lambda^2_0\mathbb{C}^{2n}$. *В този изключителен случай имаме* $G = Sp(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$, $r_{max} = n$, $r_{us} = 1$, $k = n - 1$, *а степените на пораждащите инварианти са* $d_j = 2j$ *за* $j = 1, ..., k$; *в частност* $d_1 = r_{us} + 1$ *и* $d_k = 2(r_{max} - 1)$.

(4) $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(V)$ *едно от многообразията в Таблица 1.*

Таблица 1

Проективни многообразия $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(V)$ с полунепрекъсната ранг-функция и транзитивна група $G \to SL(V)$ (дадена е максимална свързана полупроста G), стойности на максимален нестабилен и максимален ранг r_{us}, r_{max}, степени d_j на минимално пораждащо множество в $\mathbb{C}[V]^G$.

$\mathbb{X} \subset \mathbb{P}(V)$	G	r_{us}, r_{max}	$d_1, ..., d_k$
$\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$	SL_n	$r_{us} = r_{max} = 1$	0
$\mathrm{Ver}_2(\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)) \subset \mathbb{P}(\mathrm{S}^2\mathbb{C}^n)$	SL_n	$r_{us} = n - 1, r_{max} = n$	n
$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^n)$	SL_n	n нечетно: $r_{us} = r_{max} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ n четно: $r_{us} + 1 = r_{max} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	0 $n/2$
$\mathrm{Fl}_{1,n-1}(\mathbb{C}^n) \subset \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n)$	SL_n	$r_{us} = 1, r_{max} = n$	$2, ..., n$
$\mathrm{Q}^{n-2} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$	SO_n	$r_{us} + 1 = r_{max} = 2$	2
$\mathrm{S}^{10} \subset \mathbb{P}^{15} = \mathbb{P}(\Lambda^{even}\mathbb{C}^5)$	Spin_{10}	$r_{us} = r_{max} = 2$	0
$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{2n}, \omega) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2_0\mathbb{C}^{2n})$	Sp_{2n}	2,...,n	2,4,6...,2n-2
$\mathrm{E}^{16} \subset \mathbb{P}^{26} = \mathbb{P}(\mathrm{Herm}_{3\times3}(\mathbb{O})_\mathbb{C})$	E_6	$r_{us} = 2, r_{max} = 3$	3
$\mathrm{F}^{15} \subset \mathbb{P}^{25} = \mathbb{P}(\mathrm{SHerm}_{3\times3}(\mathbb{O})_\mathbb{C})$	F_4	$r_{us} = 1, r_{max} = 3$	2, 3
$\mathrm{Seg}(\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$	$SL_m \times SL_n$	ако $m < n$: $r_{us} = r_{max} = m$ ако $m = n$: $r_{us} + 1 = r_{max} = m$	0 m

Означенията в таблица 1 са следните: $\mathrm{Ver}_2 : [v] \mapsto [v^2]$ е квадратичното влагана на Веронезе на проективно пространство; $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ е Грасмановото многообразие от равнини в $\mathbb{C}^n$, с Плюкерово влагане; $\mathrm{Fl}_{1,n-1}(\mathbb{C}^n)$ е флаговото многообразие от инцидентни прави и хиперравнини в $\mathbb{C}^n$, вложено като проективната присъединена орбита в $\mathfrak{sl}_n$ състояща се от нилпотенти с ред 1; Q^{n-2} е неизродена квадрика в $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$; S^{10} е многообразието от чисти спинори в неприводим спинорен модул на $Spin_{10}$; $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ е многообразието от равнини в $\mathbb{C}^{2n}$ изотропни относно неизродена антисиметрична форма ω; $\mathrm{Herm}_{3\times3}(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ е комплексифицираното пространство от октонионни Ермитови 3×3-матрици и $\mathrm{SHerm}_{3\times3}(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ е подпространството от матрици с нулева следа, $\mathrm{E}^{16} \subset \mathbb{P}(\mathrm{Herm}_{3\times3}(\mathbb{O})_{\mathbb{C}})$ е многообразието от матрици с ранг 1 относно детермнантата на Фройдентал, $\mathrm{F}^{15} = \mathrm{E}^{16} \cap \mathbb{P}(\mathrm{SHerm}_{3\times3}(\mathbb{O})_{\mathbb{C}})$; $\mathrm{Seg} : ([v], [w]) \mapsto [v \otimes w]$ е влагането на Сегре на произведение на проективни пространства.

Доказателството на класификацията на неприводимите представяния $V = V(\lambda)$ на едносвързани полупрости групи G, за които многообразието $\mathbb{X} = \mathbb{X}(\lambda) \subset \mathbb{P}(V)$ удовлетворява $\Sigma_2(\mathbb{X}) = \Sigma_2^\circ(\mathbb{X})$, получено от автора и А. Петухов в [3], се базира на факта, че $\Sigma_2(\mathbb{X})$ има отворена G-орбита, и на гореспоменатата теорема на Фултън и Хансен [FH79], гласяща, че свойството $\Sigma_2(\mathbb{X}) = \Sigma_2^\circ(\mathbb{X})$ е еквивалентно на свойството всяка точка принадлежаща на проективна права $L_1 \subset \mathbb{P}(V)$ допирателна към $\mathbb{X}$ да лежи също на права L_2 пресичаща $\mathbb{X}$ в поне две различни точки. Тези условия са преведени в комбинаторно свойство на доминантното тегло λ, което е силно ограничаващо и е използвано за пълно изброяване на случаите.

Свойствата на пораждащите инварианти са получени с помощта на теореми 0.1 и 0.2, в комбинация с резулати на Кац [Kac80] за представяния с полиномиални пръстени от инварианти, както и някои теореми на Зак [Z93] за секантни многообразия към хомогенни проективни многообразия с ниска коразмерност.

(I-4) GIT за действие на подгрупи върху флагови многообразия

В статии [5] и [7], съвместни с Х. Сеппенен - Геометрична теория на инвариантите за действие на свързана редуктивни подгрупа $\iota : \hat{G} \subset G$ върху флагови многообразия на полупроста свързана комплексна линейна алгебрична група G. В [5] е разгледан частния случай на главни SL_2-подгрупи в полупрости групи, а [7] съдържа общите резултати. Тук приемаме, че и двете групи са полупрости и G е едносвързана.

Една естествена и ширико изучавана задача за дадено такова влагане на групи е *задачата за разклонения на представяния*, т.е. описание на неприводимите $\hat{G}$-подмодули в ограничения на неприводими представяния на G до подгрупата $\hat{G}$. Важни обекти в тази тема са следните моноиди в решетките Λ и $\hat{\Lambda} \times \Lambda$, и конуси в реалните векторни пространства $\Lambda_{\mathbb{R}} = \Lambda \otimes \mathbb{R}$ и $\hat{\Lambda}_{\mathbb{R}} \times \Lambda_{\mathbb{R}}$, обобщаващи класическите моноид и конус на Лутълууд-Ричардсон, както и техните сечения съответстващи на пространства от инварианти, дефинирани както следва:

$$\begin{aligned} LR(\hat{G} \subset G) &= \{(\hat{\lambda}, \lambda) \in \hat{\Lambda}^+ \times \Lambda^+ : \mathrm{Hom}_{\hat{G}}(\hat{V}(\hat{\lambda})^*, V(\lambda)) \neq 0\} , \\ \mathcal{LR}(\hat{G} \subset G) &= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}_+} LR \subset \hat{\Lambda}_{\mathbb{R}} \times \Lambda_{\mathbb{R}} , \\ LR_0(\hat{G} \subset G) &= \{\lambda \in \Lambda^+ : V(\lambda)^{\hat{G}} \neq 0\} , \\ \mathcal{LR}_0(\hat{G} \subset G) &= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}_+} LR_0 \subset \Lambda_{\mathbb{R}} . \end{aligned}$$

Задачата за разклонения на представяния за дадено влагане ι може да бъде преформулирана като задача за описание на инварианти за диагонално влагане $\hat{G} \subset \hat{G} \times G$ посредством изоморфизма $\mathrm{Hom}_{\hat{G}}(\hat{V}, V) \cong (\hat{V}^* \otimes V)^{\hat{G}}$. Имаме $LR(\hat{G} \subset G) = LR_0(\hat{G} \subset \hat{G} \times G)$. Доказано е от Брион и Кноп (виж [E92]), че LR_0 е крайно породен моноид, а $\mathcal{LR}_0$ е рационален полиедрален изпъкнал конус.

Прототипен случай на задачата за разклоненията е задачата за разлагане на тензорни произведения: какви са неприводимите подмодули в тензорно произведение на няколко, да кажем k, неприводими модула над дадена група $\hat{G}$? В този случай влагането на групи е диагонално $\hat{G} \hookrightarrow \hat{G}^{\times k} = G$. Задачата за разлагане на тензорни произведения на k неприводими модула е еквивалентна на задачата за описание на инвариантите в тензорни произведения на $k+1$ неприводими модула.

Много от резултатите по задачата за разклоненията са постигнати посредством гореспоменатата преформулировка в задача за инварианти, която на свой ред може да бъде формулирана в термини на Геометричната Теория на Инвариантите (GIT). Това е и гледната точка приета тук. Така ние се фокусираме върху конуса $\mathcal{LR}_0$. Подходът базиран на GIT е използван за изучаване на $\mathcal{LR}_0$ в серия от работи на Хекман, Беренщайн, Сямаар, Белкале, Кумар, Ресейр, Ричмонд, и др. (виж [H82], [BS00], [BK06], [R10], [RR11]), кулминиращи в получения от Ресейр [R10] минимален списък от неравенства задаващи конуса $\mathcal{LR}_0$. Нека скицираме основните стъпки. Конусът $\mathcal{LR}_0$ бива отъждествен с $\hat{G}$-обилния конус на флаговото многообразие $C^{\hat{G}}(X) \subset \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ - затворения конус породен от обилните линейни разслоения, чиито пръстени от сечения имат неконстантни $\hat{G}$-инвариантни елементи. Отъждествяването

$$\mathcal{LR}_0 \cong C^{\hat{G}}(X)$$

е възможно при условие, че $\mathcal{LR}_0$ съдържа строго доминантни тегла, или при еквивалентното условие, че $C^{\hat{G}}(X)$ е непразно. Неравенствата описващи $\mathcal{LR}_0$ са изведени от критерия на Хилберт-Мъмфорд и имат вида

$$\lambda(w\xi) \leq 0 \,, \tag{2}$$

където $\lambda \in \Lambda^+$ е доминантното тегло съответстващо на линейното разслоение, $w \in W$ е елемент на Вайловата група на G, а ξ е елемент на решетката $\hat{\Gamma}$ от еднопараметрични подгрупи на Картанова подгрупа $\hat{T} \subset \hat{G}$ удовлетворяваща $\hat{T} = \hat{G} \cap T$. Последната решетка може да бъде отъждествена с подрешетка на ко-тегловата решетка $\Gamma = \Lambda^\vee$. Релевантните двойки $(\xi, w) \in \hat{\Gamma} \times W$ удовлетворяват някои условия, и точното определение на тези условия представлява основната техническа трудност в описанието на $\mathcal{LR}_0$. Краен, но не оптимален списък от двойки (ξ, w) е получен първо от Беренщайн и Сямаар, в последствие оптимизиран от Белкале и Кумар за случая на диагонални влагания, и от Ресейр за произволни влагания на редуктивни групи. Релевантните елементи ξ се получават сравнително лесно - те се определят от $\hat{T}$-теглата на фактормодула $\mathfrak{g}/\hat{\mathfrak{g}}$ получен от алгебрите на Ли. В диагоналния случай получаваме точно фундаменталните ко-тегла на $\hat{G}$. Намирането на релевантните Вайлови елементи w предсавлява по деликатен проблем. Условията върху w са кохомологични, изразени чрез рестрикцията на Шубертови класове от флагови многообразия на G до вложени в тях флагови многообразия на $\hat{G}$. Оптималните условия използват не естественото произведение на кохомологични класове индуцирано от диаоналното влагане на многообразие в неговия ДеКартов квадрат, а негова деформация разработена от Беклале и Кумар за тази конкретна цел, и свързана в последствие с еcтвестено произведение в кохомологии на алгебри на Ли.

Гореспоменатите технически трудности мотивират търсенето на описания на $\mathcal{LR}_0$, които не използват кохомологични изчисления. В диагоналния случай това е постигнато в [BK06], с неоптимален списък от неравенства, оптимизиран за някои класически групи: от Дерксен и Уейман [DW11] за тип A чрез теория на колчаните, и от Ресейр [R12] за типове A,B,C.

Един от приведените в [7] резултати е описание на $\mathcal{LR}_0$ чрез краен списък от неравенства определени без използване на кохомологии. В общия случай този списък не е оптимален, но има качествен аспект, който позволява извличането на нови структурни свойства на конуса $\mathcal{LR}_0$ засягащи не само неговата граница, но и вътрешността. Това е обсъдено по-долу. Като подготовка представяме едно описание на $\hat{G}$-обилния конус, което се получава сравнително лесно. Кохомологичното условие споменато по-горе е заместено с условие върху размерността на конкретно подмногообразие на X - насищане на Шубертово подмногообразие - съответстващо на произволна двойка $(\xi, w) \in \hat{\Gamma} \times W$. Ако $\hat{G}$-обилният конус $C^{\hat{G}}(X)$ е непразен, то

$$C^{\hat{G}}(X) = \{ \lambda \in \Lambda^+_{\mathbb{R}} : \lambda(w^{-1}\xi) \leq 0 \quad \text{for all pairs } (\xi, w) \in \mathfrak{R} \times W \text{ such that} \quad \dim \hat{G}P_\xi x_w = \dim \hat{G}/\hat{P}_\xi + \dim P_\xi x_w = \dim G/B \}$$

където $\hat{P}_\xi \subset \hat{G}$ и $P_\xi \subset G$ са параболичните подгрупи зададени от ξ, и $x_w = wB \in X$, а $\mathfrak{R} = \{\xi_1, ..., \xi_q\}$ е известно крайно множество от доминантни елементи, наречени еднопараметрични групи на Ресейр, и характеризирано с това, че съответните параболични подгрупи P_{ξ_j} на G са максимални измежду параболичните групи в G дефинирани от еднопараметрични подгрупи на $\tilde{G}$. Що се отнася до изчислимостта, размерностите на $\hat{G}/\hat{P}_\xi$ и $P_\xi x_w$ имат известен комбинаторен израз в термини на корневи системи и дължини на елементи във Вайлови групи. Неравенството $\dim \hat{G}P_\xi x_w \leq \dim \hat{G}/\hat{P}_\xi + \dim P_\xi x_w$ следва непосредствено от дефинициите, но условието за равенство е по-деликатно и представлява основния технически проблем при дадения подход. Доказателството на горната формула за $C^{\hat{G}}(X)$, получено съвместно с Х. Сеппенен в [7], е паралелно на разсъжденията в [BS00], като разликата е по-скоро формална отколкото съществена, но следва да се отбележи, че нашето разсъждение почива на явна затворена формула за многообразието $X^{us}_{\hat{G}}$ от $\hat{G}$-нестабилни точки в X, която не фигурира двугаде в чист вид, и която се оказва много полезна в дадения контекст. Докато предишните автори описват границата на $C^{\hat{G}}(X)$ чрез условия за непразнота на множеството от полустабилни точки $X^{ss}_{\hat{G}} = X \setminus X^{us}_{\hat{G}}$, нашата явна формула за $X^{us}_{\hat{G}}$ позволява детайлно изследване на вътрешността на конуса.

За глобален поглед към $\hat{G}$-инвариантите в G-модули е подходящо да се използва Коксовия пръстен на X. Пръстена от инварианти $\mathrm{Cox}(X)^{\hat{G}}$ също е крайно породен. Коксовите пръстени са важна част от теорията на мечтаните пространства на Мори, който имат, по дефиниция, крайно породени Коксови пръстени (виж [HK00]). Флаговите многообразия са мечтании пространства на Мори. Имайки предвид, че пръстените от инварианти в пръстена породен от сеченията на дадено линейно разслоение върху X се реализира като пръстен породен от сеченията на линейно разслоение върху Хилбертов фактор на X, горните разсъждения водят до естествения въпрос: *съществува ли многообразие Y, получено като подходях фактор на X под действието на $\hat{G}$, чийто Коксов пръстен е изоморфен на* $\mathrm{Cox}(X)^{\hat{G}}$*?* Търсеният фактор Y, мечтано пространство на Мори, е конструиран от Сеппенен в [S14] с точност до крайно разширение между Коксовите пръстени, но при определени условия - съществуване на така наречените $\hat{G}$-подвижни GIT-камери в $C^{\hat{G}}(X)$. Последните се състоят от $\hat{G}$-обилни линейни разслоения $\mathcal{L}_\lambda$ върху X, чието множество от нестабилни точки $X^{us}_{\hat{G}}(\lambda)$ има коразмерност поне 2 в X и съдържа всички точки със стабилизатор от положителна размерност. Това мотивира изследването на GIT-класовете върху X - класове на еквивалентност на линейни разслоения, зададени с равенство на многообразията на нестабилни точки - и по-специално въпроса за съществуване на $\hat{G}$-подвижни GIT-камери.

В [7], използвайки нашата затворена формула за многообразието от нестабилни точки $X^{us}_{\hat{G}}(\lambda)$, извеждаме комбинаторно описание на ветрилото от GIT-класове върху X. Доказано е, че всички неравенства определящи GIT-камери имат вида (2) и е дадена крайна процедура за извеждане на релевантните двойки (ξ, w).

Един забележителен факт, доказан в [7], е следния: ако GIT-класовете на две тегла $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda^{++}$ имат пресчащи се затворени обвивки, то коразмерностите на съответните нестабилни подмногообразия се отличават с най-много 1, т.е.

$$|X^{us}_{\hat{G}}(\lambda_1) - X^{us}_{\hat{G}}(\lambda_2)| \leq 1$$

В частност, ако λ принадлежи на регулярната част от границата на $C^{\hat{G}}(X)$ то $\mathrm{codim}_X X^{us}_{\hat{G}}(\lambda) = 1$. Като следствие от това наблюдение получаваме следната теорема.

Теорема 0.4. ([7])

Множествата $C_k^{\hat{G}}(X) = \overline{\{\lambda \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{++} : \operatorname{codim}_X X_{\hat{G}}^{us}(\lambda) \geq k\}} \subset \Lambda_{\mathbb{R}}^{+}$, *за* $k \geq 1$, *образуват редица от вложени един в друг рационални полиедрални изпъкнали конус в* $\Lambda_{\mathbb{R}}^{+}$. *Когато* $C_k^{\hat{G}}(X)$ *е непразно, имаме*

$$C_k^{\hat{G}}(X) = \left\{ \lambda \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{+} : \lambda(w^{-1}\xi) \leq 0, \begin{array}{l} \forall(\xi, w) \in \mathfrak{R} \times W, \\ \dim \hat{G}P_\xi x_w = \dim \hat{G}/\hat{P}_\xi + \dim P_\xi x_w = \dim G/B - k + 1 \end{array} \right\}.$$

Нещо повече, конусът $C_{k+1}^{\hat{G}}(X)$ *се съдържа във вътрешността на* $C_k^{\hat{G}}(X)$, *в топологията на Камерата на Вайл.*

Тази теорема дава критерии за съществуване на $\hat{G}$-подвижни GIT-камери, а именно условието $C_3^{\hat{G}}(X) \neq \emptyset$. Не е трудно да се съобраз, че това условие е изпълнено за повечето подгрупи на дадена G, и да се извлекат конкретни коминаторни и числови критерии. В частност,за диагонални влагания $\hat{G} \subset \hat{G}^{\times k} = G$, доказваме съществуване на $\hat{G}$-подвижни GIT-камери за достатъчно големи k.

Разширени са резултатите на Сеппенен за фактор Y на X относно $\hat{G}$-подвижна GIT-камера. Доказвано е, че GIT-ветрилото за действието на $\hat{G}$ върху X е идентично с ветрилото от камери на Мори върху Y. Основните резултати са вофмулирани в следната теорема.

Теорема 0.5. ([7])

Да допуснем, че GIT-класа на дадено $\lambda \in \Lambda^+$ *е* $\hat{G}$*-подвижна GIT-камера, и нека* Y *е съответния GIT-фактор. Тогава* Y *а пространство на Мори и съществува изоморфизм наПикарови групи върху* $\mathbb{R}$ *даващ следните съответствия:*

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{Pic}(X)_{\mathbb{R}} & \cong & \operatorname{Pic}(Y)_{\mathbb{R}} \\
C^G(X) & \cong & \overline{\operatorname{Eff}}(Y) \\
\textit{GIT-chambers} & \leftrightarrow & \textit{Mori chambers} \\
\operatorname{Mov}^{\hat{G}}(X) & \cong & \operatorname{Mov}(Y) \\
\overline{C} & \cong & \operatorname{Nef}(Y) \\
\operatorname{Cox}(X)^{\hat{G}} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} V(\lambda)^{\hat{G}} & \cong & \textit{Finite extension of } \operatorname{Cox}(Y)\,.
\end{array}$$

Мечтаните пространства на Мори получени като фактори по този начин представляват интерес за по-нататъшни изследвания.

(I-5) Частични линейни обвивки на присъединени орбити на компактни групи. (Статия [8].)

Изследшат се свойстша на изпькналите обвивки на (ко)присъединени орбити на компактни свързани групи, с приложения към теорията на инвариантите и разлагания на тензорни произведения на неприводими представяния. Въведено е понятието за частична изпъкнала обвивка, както и два числови инварианта на присъединена орбита на полупроста група. Доказано е, че орбитите, за които тези инварианти не надвишават дадено $r \in \mathbb{N}$, образуват, след пресичане с камера на Вайл, разионален полиедрален конус в тази камера, свързан с конуса на Литълвууд-Ричардсон за разлагания на тензорни произведения на r-модула. Числовите инварианти дават също долни граници за степените на инвариантни полиноми върху неприводими представяния, подобни на границата показана тук в теорема 0.1.

Литература

[AL92] D. Arnal, J. Ludwig, *La convexité de l'application moment d'un groupe de Lie*, J. Funct. Anal. **105**:2 (1992), 256–300.

[A82] M. F. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 1–15.

[BD04] Baur K., Draisma J., *Higher Secant Varieties of the Minimal Adjoint Orbit*, J. Algebra **280** (2004) 743–761.

[BDG07] Baur K., Draisma J., de Graaf W., *Secant Dimensions of Minimal Orbits: Computations and Conjectures*, Experimental Math. **16** (2007) 239–250.

[BK06] P. Belkale, S. Kumar, *Eigenvalue problem and a new product in cohomology of flag varieties*, Inventiones Math. 166 (2006), 185–228.

[BKR12] P. Belkale, S. Kumar, N. Ressayre, *A generalization of Fulton's conjecture for arbitrary groups*, Math. Ann. **354** (2012), 401–425.

[BS00] A. Berenstein, R. Sjamaar, *Coadjoint orbits, moment polytopes, and the Hilbert-Mumford criterion*, J. of AMS **13** (2000), 433-–466.

[Bou68] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VI: Systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1337, Herman, Paris, 1968.

[Der01] H. Derksen, *Polynomial bounds for rings of invariants*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 955–963.

[DW11] H. Derksen, J. Weyman, *The combinatorics of quiver representations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **61** (2011), no. 3, 1061-–1131.

[DH98] I.V. Dolgachev, Y. Hu, *Variation of geometric invariant theory quotients*, Pub. IHES **78** (1998), 5–56.

[E92] A. G. Elashvili, *Invariant algebras.* In: Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory, Adv. Soviet Math. **8** (1992), 57-–64.

[FMK94] J. Fogarty, D. Mumford, F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3rd edn, Springer Verlag, New York, 1994.

[FH79] W. Fulton, J. Hansen, *A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mappings*, Ann. of Math. **110 (2) no. 1** (1979), 159–166.

[H82] G.J. Heckman, *Projections of orbits and asymptotic behaviour of multiplicities for compact connected Lie groups*, Invent. Math. **67** (1982) 333–356.

[HK00] Y. Hu, S. Keel, *Mori dream spaces and GIT*, Michigan Math. J. **48** (2000), 331–348.

[Kac80] V. Kac, *Some remarks on nilpotent orbits*, J. of Algebra **64** (1980), 190–213.

[Kir84] F. C. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes, Vol. 31, Princeton Univ. Press, 1984.

[Kn98] F. Knop, *Some remarks on multiplicity free spaces*, Proc. NATO Adv. Study Inst. on Representation Theory and Algebraic Geometry (A. Broer, G. Sabidussi, eds.), Nato ASI Series C, Vol. **514**, Dortrecht: Kluwer (1998), 301—317.

[LM03] J.M. Landsberg, L. Manivel, *On the projective geometry of rational homogeneous varieties*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 65–100.

[Lan12] J.M. Landsberg, *Tensors: Geometry and Applications*, Grad. Stud. in Math., Vol. **128**, AMS 2012.

[ChP2021] A. Chirvasitu, I. Penkov, *Universal tensor categories generated by dual pairs*, Applied Categorical Structures **29** (2021), 915-950.

[PS2014] I. Penkov, V. Serganova, *Tensor representations of Mackey Lie algebras and their dense subalgebras*, in: Developments and Retrospectives in Lie Theory: Algebraic Methods, Developments in Mathematics, vol. 38, Springer Verlag 2014, pp. 291-330.

[P81] V.L. Popov, *Constructive invariant theory*, Astérisque 87-88 (1981), 303–334.

[P03] V.L. Popov, *The cone of Hilbert Nullforms*, Proc. Steklov Inst. of Math. **241** (2003), 177-–194.

[R10] N. Ressayre, *Geometric invariant theory and the generalized eigenvalue problem*, Invent math **180** (2010), 389-–441.

[R12] N. Ressayre, *A cohomology-free description of eigencones in types A, B, and C*, Int. Math. Res. Not. 2012, no. 21, 4966—5005.

[R00] N. Ressayre, *GIT-equivalence for G-line bundles*, Geometriae Dedicata **81** (2000), 295–324.

[RR11] N. Ressayre, E. Richmond, *Branching Schubert calculus and the Belkale-Kumar product on cohomology*, Proc. AMS **139** (2011), 835–848.

[S14] H. Seppänen, *Global branching laws by global Okounkov bodies*, arXiv:1409.2025, 2014.

[Sm04] A.V. Smirnov, *Decomposition of symmetric powers of irreducible representations of semisimple Lie algebras and the Brion polytope*, Trans. Moscow Math. Soc. **65** (2004), 213-–234.

[T96] M. Thaddeus, *Geometric invariant theory and flips*. J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 691—723.

[T19] V.V. Tsanov, *Secant varieties and degrees of invariants*, J. Geom. Symm. Phys. **51** (2019), 73-–85.

[We93] D.L. Wehlau, *Constructive invariant theory for tori*, Ann. Inst. Fourier, **43** (1993), 1055–1066.

[Wi92] N.J. Wildberger, *The moment map of a Lie group representation*, Trans. AMS **330** (1992), 257–268.

[Z93] F.L. Zak, *Tangents and secants of algebraic varieties*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. **127**, AMS 1993.

[VW14] M. Vergne, M. Walter, *Moment cones of representations*, arXiv:1410.8144, 2014.

[W92] Wildberger N., *The Moment Map of a Lie Group Representation*, Trans. AMS **330** (1992) 257–268.